Devoir Libre d'analyse

Excercice 1 :

1. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$ (L).

- on pose $y' - 2y = 0$ (H).

$\Leftrightarrow \quad y' = 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2$

Donc la solution de H est $y_0 = c.e^{2x}$

- on cherche une solution particulière de (L).

soit $y_p(x) = c(x).e^{2x}$ une solution de (L)

donc $y_p'(x) - 2y_p(x) = \cos(x) + 2\sin(x)$

alors : $c'(x)e^{2x} + \cancel{2e^{2x}c(x)} - 2c(x)e^{2x} = \cos(x) + 2\sin(x)$

$\Leftrightarrow \quad c'(x)e^{2x} = \cos(x) + 2\sin(x)$

$\Leftrightarrow \quad c'(x) = (\cos(x) + 2\sin(x))e^{-2x}$

$\Leftrightarrow \quad c(x) = \int (\cos(x) + 2\sin(x))e^{-2x}$

$\Leftrightarrow \quad c(x) = \int 2\sin(x)e^{-2x} + \int \cos(x)e^{-2x}$

$$\boxed{c(x) = I + J}$$

Le calcul de I par Intégrale par partie :

commençont par : $I = \int e^{-2x}\cos(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \quad I = -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \int \frac{e^{-2x}\sin(x)}{2}\,dx$

$$\iff I = -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \left(-\frac{e^{-2x}\cos(x)}{4} - \int -\frac{e^{-2x}\sin(x)}{4}dx\right)$$

$$= -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \left(-\frac{e^{-2x}\cos(x)}{4} + \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-2x}\sin(x)\,dx}_{\frac{1}{4}I}\right)$$

$$I = \frac{-2e^{-2x}\sin(x) - e^{-2x}\cos(x)}{5}$$

On utilisant la même méthode pour J on obtient

$$J = \frac{e^{-2x}\sin(x) - 2e^{-2x}\cos(x)}{5}$$

Alors $c(x) = I + J = -\frac{e^{-2x}(3\sin(x) + 4\cos(x))}{5}$

finalement les solution de (L) dans $\mathbb{R}$ sont :

$$y = y_0 + \underbrace{c(x).e^{2x}}_{y_p(x)} = \boxed{Ce^{2x} - \frac{3\sin x + 4\cos x}{5} \ / c \in \mathbb{R}}$$

2 - $y' - 2xy = -(2x-1)e^{x} \quad (L_1)$

On pose $y' - 2xy = 0 \quad (H_1)$

$\iff y' = 2xy \iff \frac{y'}{y} = 2x$

Donc la sol de (H_1) est $y_0 = Ke^{x^2}$, $K \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière de (H_1) :
puisque le 2ème membre s'écrit sous forme
$b = P(x).e^{mx}$ et que $1 - 2x \neq 0$
Alors (H_1) admet une solution particulière de

la forme $\Psi(x) = q(x)\, e^x$

tel que $q(x) = ax+b$. (poly de 1er degré)

Alors $\Psi'(x) - 2x\, \Psi(x) = -(2x-1)\, e^x$

$\Leftrightarrow (a + ax+b) e^x - 2x(ax+b).e^x = -(2x-1)\, e^x$

$\Leftrightarrow ((a-2b)x + 2a x^2 + a+b)\, e^x = -(2x-1)\, e^x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b = -2 \\ a+b = 1 \\ -2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

d'où $\boxed{\Psi(x) = e^x}$

finalement les solutions de (L_1) dans $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{y = y_0 + \Psi(x) = K e^{x^2} + e^x}$$

3- $\quad x y' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2} \quad (L_2)$

pour $x \neq 0$:

$(L_2) \Leftrightarrow y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{1}{1+x^2}$

On pose : $\quad y' + \dfrac{2}{x} y = 0 \; : (H_2)$

$\Leftrightarrow y' = -\dfrac{2}{x} y \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{2}{x}$

y_0 est sol de $(H_2) \Leftrightarrow y_0 = \boxed{K e^{-2\ln|x|}, K \in \mathbb{R}}$

$= \boxed{K/x^2, K \in \mathbb{R}}$

solution de (L_2)

Soit $y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{x^2}$

Alors $y_p'(x) + \frac{2}{x} y_p(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow K'(x) \cdot \frac{1}{x^2} + K(x) \cdot \frac{-2x}{x^4} + \frac{2}{x} \cdot K(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow K'(x) - \cancel{\frac{2}{x^3} K(x)} + \cancel{\frac{2}{x^3} K(x)} = \frac{1 \cdot x^2}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow K'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

d'où $K(x) = x - \arctan(x)$

alors $\boxed{y_p^*(x) = \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}}$

Alors $y = y_0 + y_p(x) = \boxed{\frac{K - \arctan(x)}{x^2} + \frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$K \in \mathbb{R}$

4 - $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos(x)$. (L_4)

On pose $y'' - 4y' + 3y = 0$

. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$

on a $\Delta = 4 > 0$ d'où $r = 1$ ou $r = 3$

d'où $y_0(x) = \lambda e^x - \mu e^{3x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

. On cherche une solution de la forme

$y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx) e^x$ de $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $y_1''(x) - 4y_1'(x) + 3y_1(x) = x^2 e^x$

Aprés la simplification et comparaison des facteurs on trouve

$$\begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc $y_1(x) = -\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x$

- On cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}\cos(x)$. $(*)$

On pose $y_2(x) = (ax+b)e^{(2+i)x}$ solution de $(*)$

Aprés la simplification et comparaison des facteurs on trouve :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2ia + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2}i \end{cases}$$

donc $y_2(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{i}{2}\right)e^{(2+i)x}$

$\Rightarrow y_2(x) = \left(-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)e^{2x}$ (partie réelle)

- On appliquant le principe de superposition on trouve que la solution particulière de (L_4) est $\underline{y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)}$

Finalement la solution générale d'équation

$y = y_0 + y_p(x) =$

$-\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)e^{2x} + \lambda e^x - \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5- $y'' - 2y' + 5y = -4x e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$
$-4e^{x}\sin(2x)$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = (i\,4)^2 \ (<0)$ $\quad r_1 = 1+2i \quad r_2 = 1-2i$

d'où la solution générale de l'homogène est :

$y_0(x) = \lambda e^{x}\cos(2x) + \mu\, e^{x}\sin(2x) \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

. On cherche une solution particulière de l'équation

$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x)$

on trouve $e^{-x}\sin x$ comme solution

. On cherche de la même façon à resoudre

$y'' - 2y' + 5y = -4e^{x}\sin(2x)$

et on trouve $xe^{x}\cos(2x)$ comme solution

finalement . les solutions de l'équation

$y(x) = xe^{x}\cos(2x) + e^{-x}\sin x + \lambda e^{x}\cos(2x) + \mu e^{x}\sin(2x)$

Excercice 2 :

$$\frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$$

• On pose $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ on a $y(x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$

En dérivant on obtient :

$\frac{1}{2}f^2(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 + \frac{2}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) f(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y'^2 = -\frac{1}{x^2}y^2 + \frac{2}{x}yy'$

. On a si $y(x) = 0 \Rightarrow \left(\int f(t)\,dt\right)^2 = 0 \Rightarrow f = 0$

On pose $a = \sup \{ f(x) \quad y(x) = 0 \}$ avec

d'où y est non nulle sur $]a, +\infty[= I$

D'où

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x}\frac{y'}{y}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)' - \frac{4}{x}\left(\frac{y'}{y}\right) + \frac{2}{x^2} = 0$$

pose $X = \frac{y'}{y}$

d'où $$X^2 - \frac{4}{x} X + \frac{2}{x^2} = 0$$

d'où $X = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x}$ (équa. homo)

d'où $y_0(x) = \lambda e^{(2 \pm \sqrt{2}) \ln(x)} = \lambda e^{\ln(x^{2 \pm \sqrt{2}})}$
$= \lambda x^{2 \pm \sqrt{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$

$f = y'$ on trouve

$$f(x) = (2 + \sqrt{2}) \lambda x^{(1+\sqrt{2})}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Excercice 3: $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

1 _ • La suite (S_n):

La suite (S_n) des sommes particulier définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_n$ est une suite croissante puisque (U_n) une suite de termes positifs

$$S_n - S_{n-1} = U_n \geq 0$$

• La suite (t_n).

La suite (t_n) des sommes particuliers défini par $t_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ est une suite croissante puisque (V_n) une suite de terme positif

$$t_n - t_{n-1} = V_n \geq 0$$

2- Les suites (S_n) et (t_n) sont croissantes de plus il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \leq t_n + \alpha$

On a si la série $\sum V_k$ converge, alors la suite (t_n) converge soit T sa limite
La suite (S_n) est croissante et majorée par $T + \alpha$ donc elle converge et ainsi la série $\sum U_k$ converge

Inversement, si la série $\sum U_k$ diverge, alors la suite tend vers $(+\infty)$ et il ~~en~~ est de même pour la suite (t_n) et ainsi la série $\sum V_k$ diverge.

3- On suppose que U_n équivalent à V_n quand n tend vers l'infini on pose par l'hypothèse
$\forall \varepsilon > 0$ il existe K_0 tel que
$\forall K \geq K_0$

$$\left| \frac{U_K}{V_K} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$(1 - \varepsilon) V_K < U_K < (1 + \varepsilon) V_K$$

On fixe $\varepsilon < 1$

- si $\sum U_k$ converge donc $\sum (1-\varepsilon) V_K$ converge donc $\sum V_K$ converge également
- Si $\sum U_K$ diverge donc $\sum (1+\varepsilon) V_K$ diverge donc $\sum V_K$ diverge.

4- On suppose que $\sum U_n$ diverge
On a : + (S_n) croissante, donc $\frac{1}{S_n}$ décroissante
+ $S_n > 0$ donc $\frac{1}{S_n} > 0$
+ $\lim_{+\infty} \frac{1}{S_n} = 0$ (car on suppose que $\sum U_n$ diverge)

Donc, en se basant sur le critère de Leibnez la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{J_n}$ converge.

Excercice 4.

1 - On a la série de terme générale $U_n = \frac{1}{4n^2-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est équivalente à la série de terme générale $\frac{1}{k^2}$ et on a $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente d'après Riemann

d'où la série de terme générale U_n est aussi convergente.

- Détermination d'une suite (x_n) telle que $U_n = x_{n-1} - x_n$

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{a}{(2n+1)} + \frac{b}{2n-1}$$

avec,

$$a = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} (2n+1) \times \frac{1}{4n^2-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } b = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2n-1) \times \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } U_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

avec $\boxed{x_{n-1} = \frac{1}{2(2n-1)}}$ et $\boxed{x_n = \frac{1}{2(2n+1)}}$

- On déduit le calcule de la somme $\sum_{n\geq 1}^{\infty} U_n$

On a $U_n = x_{n-1} - x_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n-1} - x_n)$$

$$= x_0 - x_{n=\infty} \quad \text{et on a } \lim_{+\infty} x_n = 0$$

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = x_0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

2- On a le terme générale de $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ est équivalent à $\frac{1}{K^n}$ D'après le critère de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{K^n}$ converge

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ converge.

Exprimant V_n en fonction des U_n et W_n où:

$$W_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$$

On a $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

et puisque: $V_n = \frac{1}{(4n^2-1)^2} = U_n^2$

alors: $\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{2}{4n^2-1} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$

$$\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{4} W_n - \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{4(2n+1)^3}$$

3- On a: $\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{4} W_n - \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} W_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} U_n + \frac{1}{4}\sum^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On a: le terme $\frac{1}{(2n+1)^2}$ est équivalent à $\frac{1}{(2n-1)^2}$ quand

$n \to +\infty$ d'où on pose $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi^2}{8}$

On remplace:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi - 1}{4}$$

Excercice 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$ et $V_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) - a - Calculer U_0 :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

b - on a $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 \leq 1 \leq x^2+1$

$$0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{x^2+1} \leq x^{2n}$$

puisque $0 < 1$ donc :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n}\,dx \quad (1)$$

et on a :

$$\int_0^1 x^{2n}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \quad (2)$$

de (1) et (2) on conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}}$$

2) - a - On pose :

$$U_n + U_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,x^{2n}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2n+1}}$$

b)- On a : $\sum_{K=0}^{n} V_k = \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K}{2K+1} = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K (U_{K+1} + U_K)$

$= \sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_{K+1} + \sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_k$

On pose $\begin{cases} K' = K+1 \\ K = n \Rightarrow K' = n+1 \end{cases}$ pour la somme $\sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_{K+1}$

$\sum_{K=0}^{n} V_k = \sum_{K'=1}^{n+1} (-1)^{K'} U_{K'} + \sum_{K=0}^{n} (-1)^K U_k$

$\sum_{K=0}^{n} V_K = \sum_{K=1}^{n+1} (-1)^{K-1} U_k + \sum_{K=0}^{n} (-1)^K V_K$

$= (-1)^{n-1+1} U_{n+1} - \sum_{K=1}^{n} (-1)^{K-1} U_k + (-1)^0 U_0 + \sum_{K=1}^{n} (-1)^K U_K$

$= (-1)^n U_{n+1} + U_0 + \sum_{K=1}^{n} (-1)^{K-1} U_k + \sum_{K=1}^{n} (-1)^K V_K$

$= \boxed{(-1)^n U_{n+1} + \frac{\pi}{4}}$

c)- On a : U_n tend vers 0

car $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$ $\lim_{+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim U_n = 0$

. $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$

On a $\lim_{+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} U_{n+1} = 0$

et puisque $\sum_{K=0}^{n} V_K = (-1) \underbrace{U_{n+1}}_{0} + \frac{\pi}{4}$

d'où $\boxed{\sum_{K=0}^{n} V_k = \frac{\pi}{4}}$